

Законы случайных блужданий А. Н. Колмогорова 1934 года

Г. С. Голицын¹

В первой половине 1930-х г.г. А. Н. Колмогоров развивал аналитические методы теории вероятностей и представил в них решение уравнения типа Фоккера – Планка. Это решение содержит масштабы для моментов функции распределения вероятностей средних квадратов скоростей и относительных смещений рассматриваемых объектов, смешанного момента скоростей и координат. Исключение времени из этих моментов приводит к законам $2/3$ для структурной скорости и Ричардсона – Обухова для турбулентной диффузии. Анализ законов разгона морских ветровых волн показывает, что и здесь законы Колмогорова проявляются в росте амплитуд этих волн и в форме спектров возвышений. Эти же законы проявляются в статистических законах спектров рельефа поверхности планет, в распределении числа литосферных плит по размерам, в энергетическом спектре частиц космических лучей и в ряде других процессов. Функции распределения вероятностей в уравнении 1934 г. выведены только в условии однородности этих функций, и тем самым они позволяют покрыть широкий круг явлений и процессов.

Ключевые слова: случайные блуждания в пространстве координат и скоростей, законы турбулентности, законы разгона ветровых волн, спектры возвышений, статистика рельефа и др.

¹ Институт физики атмосферы имени А. М. Обухова Российской Академии Наук, e-mail: gsg@ifaran.ru

Введение и турбулентность

Для описания случайных движений во времени и в пространстве используется уравнение Фоккера – Планка, ФП, для функции вероятности $p(t, x, u)$, где x и u – координата и скорость, в общем случае векторы по своей природе случайные. Случайность предполагается марковской, т.е. дельта-коррелированной во времени. Общая идея принадлежит А. Эйнштейну, но особенно широко и глубоко она была разработана А. Н. Колмогоровым [17] в первой половине 1930-х годов. Достаточно подробное изложение этих идей можно найти в §24.4 книги А. С. Моница и А. М. Яглома [18]. Уравнение ФП имеет вид уравнения диффузии:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = D \frac{\partial^2 p}{\partial u_i^2}, \quad (1)$$

где D – коэффициент диффузии в пространстве скоростей. В таком виде оно было использовано А. М. Обузовым [20] для вывода основных закономерностей теории мелкомасштабной турбулентности, открытых им с Колмогоровым в 1941 г. Это уравнение имеет три масштаба:

$$\langle x^2 \rangle = \varepsilon t^3, \quad (2)$$

$$\langle xu \rangle = \varepsilon t^2, \quad (3)$$

$$\langle u^2 \rangle = \varepsilon t, \quad (4)$$

где угловые скобки означают осреднение, $\varepsilon = 2D$ – скорость генерации кинетической энергии на единицу массы, которая в статистически стационарном случае равна скорости ее диссипации, как эта величина фигурировала в 1941 г. Для простоты масштабы (2) – (4) записаны для одномерного случая. В общем случае справа появляются численные коэффициенты порядка единицы (вроде $1/3$), см. [2]). Эти масштабы являются моментами функции распределения вероятностей $p(t, x, u)$.

Если исключить из (2) время в виде $t = (\langle x^2 \rangle / \varepsilon)^{1/3}$ и подставить его в (3) и (4), то получим

$$\langle u^2 \rangle = \varepsilon^{2/3} \langle x^2 \rangle^{1/3} = (\varepsilon r)^{2/3}, \quad (5)$$

$$K = \langle x u \rangle = \varepsilon^{1/3} \langle x^2 \rangle^{2/3} = \varepsilon^{1/3} r^{4/3}, \quad (6)$$

где K по размерности и смыслу есть коэффициент турбулентной диффузии, найденный из данных наблюдений во второй половине 1920-х годов Ричардсоном [32, 33, 12] и объясненный из соображений размерности А. М. Обуховым [19, 20]. Таким образом, Обухов [20], можно сказать, показал, что законы турбулентности 1941 г. для инерционного интервала есть следствие законов теории вероятности в виде уравнения (1). Это уравнение действует и в двух и трех измерениях и нуждается лишь в однородности функции распределения вероятностей. Это объясняет, почему горизонтальные флуктуации скорости [23, 28] по измерениям перегрузок самолетов имеют спектр энергии $k^{-5/3}$ и структурные функции, пропорциональные $r^{2/3}$ [28] вплоть до масштабов 2-3 тысячи километров [27]. Такая ситуация с горизонтальной статистической структурой турбулентности была загадкой с конца 1970-х г.г. [23, 12].

То, что масштабы (2) – (4) действительно универсальны, показывает замена переменных в (1) $x = \tilde{x}(\varepsilon t^3)^{1/2}$, $u = \tilde{u}(\varepsilon t)^{1/2}$, и тогда в переменных с тильдой (шапкой) уравнение (1) не будет содержать коэффициент D , т.е. будет универсальным. Это показано в [12], где также численно просчитаны эти моменты (2) – (4). Задавался набор из N частиц, которым в начальный момент задавались случайные ускорения \dot{u} , подчиняющиеся различным распределениям вероятности для каждого шага счета (так называемое предположение марковости, т.е. независимости, дельта-коррелированности ускорений), рассчитывались скорости для каждой из частиц, а по скоростям рассчитывались координаты частиц. Вычислялись относительные скорости пар частиц и по ним строился средний квадрат $\langle u \rangle^2$, а затем средний квадрат относительных смещений пар частиц. Результаты таких расчетов изображены на рис. 1, где приведены данные расчетов для двух случаев числа частиц: $N = 10$ и $N = 100$. Видно, что даже для 10 частиц и средний квадрат скорости и средний квадрат смещений хорошо следуют своим законам, пропорциональным t и t^3 , особенно последний, т.к. второе

интегрирование сглаживает флуктуации первого. Закон диффузии (3) требует уже более сотни частиц. Законы теории вероятностей, вроде закона больших чисел, требуют бесконечного числа испытаний, и в [2] была устроена проверка, насколько велико должно быть число испытаний, чтобы вывести уравнение (1). В случае числа частиц $N = 10$ число взаимных пар будет равно числу сочетаний из N по k :

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

и при $N = 10$ и $k = 2$ число сочетаний 45. Это и дает хорошее представление момента функции распределения (4) и, особенно, (3), даже при такой небольшой величине ансамбля испытаний. Расчеты [2] показали, что моменты (2) – (4) мало зависят от выбора формы функции распределения вероятности ускорений и от размерности пространства. В отсутствие динамической модели процесса уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (1) может служить статистической моделью для анализа размерностей величин и получения соответствующих соотношений между ними.

Подчеркнем, что в уравнении Фоккера – Планка – Колмогорова (1), ФПК, первая производная ищется по параметру, зависимость от которого ищется для момента, по которому берется вторая производная. Заметим, что левая часть уравнения ФПК выглядит как субстанциональная, т.е. полная, производная функции распределения вероятности во времени.

Масштабы (2) и (4) можно рассматривать как структурные функции для положения и для скорости частицы во времени при нулевых начальных условиях. При этом (4) будет структурной функцией случайного процесса со стационарными приращениями первого порядка. Такой случайной функции можно сопоставить частотный спектр (см. [18], §13)

$$D_u(t) = \left\langle [u(\tau_0 + \tau) - u(\tau_0)]^2 \right\rangle = 2 \int_0^\infty (1 - \cos \omega t) E_n(\omega) d\omega = 4 \int_0^\infty \sin^2\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) E(\omega) d\omega, \quad (7)$$

последнее равенство получено с использованием тригонометрических тождеств $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Масштаб (3) можно рассматривать как случайный процесс со стационарными приращениями второго порядка. Теория таких процессов со стационарными приращениями произвольного порядка n развита А. М. Ягломом [21]. Там не приводятся выражения для спектров, но по аналогии, подкрепляемой соображениями размерности, можно написать

$$D_x(t) = \left\langle [x(\tau_0 + \tau) - x(\tau_0)]^2 \right\rangle = b \int_0^{\infty} (1 - \cos \omega \tau)^2 E_k(\omega) d\omega = 2b \int_0^{\infty} \sin^4 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) E_x(\omega) d\omega, \quad (8)$$

Такие ядра преобразований типа Фурье структурных функций исключают расходимости интегралов (7) и (8) при $\omega = 0$. Если измеренные структурные функции степенью вида τ^α , то степенными будут и спектры $\omega^{-\alpha-1}$. Это объясняет, почему структурные функции горизонтальных компонент скорости зависят от расстояния как $r^{2/3}$ [28], а их спектры как $k^{-5/3}$ [23] вплоть до r порядка тысячи километров. Степенной вид имеют и структурные функции относительных скоростей блоков ледника, возникающие летом в некоторых ледниках, когда эти скорости достигают десятков метров в сутки [25]: показатель степени у них порядка 0.6 ± 0.1 [25]. Еще один пример неожиданного появления степени $-5/3$ дают расчеты [34].

Морское ветровое волнение

Волны на природной водной поверхности – яркий пример сочетания динамических и статических процессов. Линейная теория устанавливает связь между длиной волны и ее периодом. Но эволюция волн, рост их амплитуды со временем – это дело уже статистического рассмотрения, начавшегося со второй половины 1950-х г.г. [32]. Бурный рост познания и углубления понимания этих процессов продолжается до сих пор. Этот рост связан с появлением атомных подводных лодок. Их плавание под водой модифицирует спектр возвышений водной поверхности, и описание таких весьма тонких процессов требует глубоких теоретических разработок, подтверждаемых и вызываемых обширными экспериментальными наблюдениями.

Первым, кто из соображений размерности предложил асимптотику этого спектра для высоких частот, был О. М. Филиппс [31]. Он предположил, что для таких частот ветер уже не играет роли, а нелинейные процессы ведут к спектральной форме

$$S_n(\omega) = \alpha_1 g^2 \omega^{-5}, \quad (9)$$

что подтверждалось некоторыми измерениями [14, 7]. Затем С. А. Китайгородский учел ветер, введя в рассмотрение скорость трения u_* . Тогда gu_* – величина, имеющая размерность скорости диссипации кинетической энергии на единицу массы, даст спектр [25, 12]

$$S_n(\omega) = \alpha_2 gu_* \omega^{-4}, \quad (10)$$

где коэффициенты α_1 и α_2 должны быть функциями возраста волнения, введенного в рассмотрение задолго до работ [32]. Эта безразмерная величина есть отношение скорости ветра, на 10 м, к фазовой скорости пика волнения [14]

$$\Omega = \frac{U \omega_p}{g}, \quad (10.1)$$

Простым глазом заметно, что молодые волны более короткие и более крутые, чем штормовые волны, т.е. при $\Omega > 1$ волны продолжают развиваться. Были предприняты многочисленные специально поставленные наблюдения для описания временного хода эволюции волн [27, 12]. Здесь должен быть учтен другой параметр подобия, так называемый разгон [14]

$$F = \frac{gx}{u^2}, \quad (11)$$

где x – расстояние до наветренного берега. Было несколько проектов по изучению так называемых законов разгона, зависимостей частоты пика и его высоты от разгона [8, 27]. Были получены соотношения

$$\frac{U f_r}{g} = A F^{-\alpha}, \quad (12)$$

$$\frac{g^2 \varepsilon}{U^4} = B F^\beta, \quad \varepsilon = \frac{h_1^2}{16} \quad (13)$$

где A , α и B , β – положительные числа, определяемые на большом объеме данных наблюдений, h_1 – существенная высота пика волнения, равная четверти средней высоты пика. Разгон связан с возрастом соотношением [8, 10] $F = (2\pi A / \Omega)^{1/\alpha}$. Показатели степени в законах разгона находятся в пределах для разных экспериментов [12]: $0.23 \leq \alpha \leq 0.33$ и $0.7 \leq \beta \leq 1.1$. Эти величины зависят от стратификации атмосферы: если та холоднее воды, то значения показателей повышаются, однако всегда

$$3\alpha \approx \beta, \quad (14)$$

крайние пары имеют такие значения: $\alpha = 0.23$ и $\beta = 0.7$, $\alpha = 0.33$ и $\beta = 1.0$. Замечено, что если атмосфера теплее воды, т.е. конвекция в ней невозможна, то волнение развивается гораздо медленнее [25, 12]. Из соотношения (14) следует, что $h^2 \propto T^3$, но это как раз первый масштаб Колмогорова (2). Рис. 2 с удивительно малым разбросом иллюстрирует эту зависимость (взята из [10]).

Этому масштабу соответствует спектр возвышений ω^{-4} , что и было получено впервые из размерности [15], затем из «первых принципов» В. Е. Захаровым и потом Тоба (см. [8, 12]). Однако это имеет место на средней стадии эволюции, на ранней крутым молодым волнам соответствует спектр $\omega^{-13/3}$, на поздней – $\omega^{-11/3}$ [8, 12]. Подробные численные расчеты эволюции волнения [24] позволяют оценить эту эволюцию в зависимости от возраста: $\omega^{-13/3}$ соответствует $\Omega > 2$, ω^{-4} – $1.2 < \Omega < 2$ и насыщенные волны – $0.83 < \Omega < 1.2$. Показатель -4 точно соответствует Колмогоровскому масштабу (2). При этом возникает некоторый численный множитель $C(\Omega)$ в виде функции безразмерного параметра подобия – возраста. Расчеты [20] дают возможность представить зависимость $C(\Omega)$ в виде

$$C(\Omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \Omega^{1/3}, & \Omega > 2 \\ 1, & 1.2 < \Omega < 2 \\ \Omega^{-2/3}, & 0.83 < \Omega < 1.2 \end{array} \right\} \quad (14.1)$$

Конечно, это не разрывная функция, а более или менее плавно переходящая в свои пределы. К тому же извлечение кубического корня несильно влияет на ее численные значения. Однако это сказывается на диффузии пятен загрязнения на поверхности океана на больших масштабах и временах [30]. Этот вопрос подробно исследовался автором [9, 12]. В публикации Окубо [30] найдено, что для размеров пятен S до тысяч км и временам до трех месяцев диффузия происходит так, что

$$K(r) \sim r^n, n = 1.15 \quad (15)$$

$$S(t) \sim t^m, m = 2.34 \quad (16)$$

Первичные данные, опубликованные в [30], были пересчитаны [9], и с 95%-ной вероятностью было найдено, что $n = 1.15 \pm 0.05$ и $m = 2.33 \pm 0.11$. Теоретические значения для спектра $\omega^{-11/3}$ и тогда $n = 7/6$ и $m = 12/5$, т.е. вполне соответствуют развитому волнению. Таким образом, развитие волнения вполне соответствует законам случайных блужданий А. Н. Колмогорова 1934 г.

Рельеф поверхности планет

Рельеф интересен для метеорологии как нижнее граничное условие в численном прогнозе погоды. Еще в середине прошлого века было сформулировано так называемое правило Каулы [35]: если глобальную поверхность планеты (поле силы тяжести) разложить по сферическим функциям, т.е. по присоединенным полиномам Лежандра, то начиная с 4-й гармоники амплитуды гармоник убывают как квадрат номера гармоники. Это имеет место и для гравитационных полей Венеры и Марса (см. [35, 12]).

Сорок лет назад появилась книга Б. Мандельброта [29] «Фрактальная геометрия природы», и с тех пор повсюду стали искать степенные зависимости. Рельеф и на участках по размерам заметно меньшим радиуса планеты вполне случаен, и спектр возвышений поверхности по горизонтали у

имеет вид

$$S_n(k) \sim k^{-n}, k = 2\pi / y \quad (17)$$

Показатель степени $n = 2.03 \pm 0.04$ согласно данным [3, 35] для 60 измерений в штате Орегон в равнинных, холмистых и горных районах в интервале масштабов от 0.3 до 30 км. Аналогичные результаты получались и для других районов суши и для дна океана. Консультации с геофизиками показали, что природа таких квадратичных зависимостей спектра рельефа до конца января 2018 г. не была ясна, как для малых, так и для больших масштабов.

Автором предложено объяснение этих закономерностей на основе идей Колмогорова о природе случайных процессов. В этой статье до сих пор использовались эти идеи для процессов во времени. Здесь же роль времени будет играть горизонтальная координата y . Тогда уравнение ФПК следует записать для функции распределения вероятностей $p(h, y)$ как

$$\frac{\partial p}{\partial y} = D \frac{\partial^2 p}{\partial h^2}, \quad (18)$$

где D с размерностью квадрата высоты, деленного на горизонтальную координату, играет роль коэффициента диффузии флуктуации высоты поверхности по горизонтали. Тогда, как и выше, можно записать

$$\langle h^2(y) \rangle = Dy. \quad (19)$$

Рассматривая это как выражение для структурной функции высот рельефа по горизонтали с помощью преобразования типа (8) и объяснений после этой формулы, можно сразу записать для спектра

$$S_n(k) = uDk^{-2} / \pi = \pi^{-1}Dk^{-2}, \quad (20)$$

где, конечно, величина коэффициента диффузии D будет своя для каждой местности.

Правило Каулы относится к гравитационному полю, и коэффициенты разложения по сферическим функциям можно назвать линейчатым спектром поля, в котором индекс n в полиноме $P_n^m(\cos \theta)$, θ – широта, отвечает радиальным (по высоте) изменениям рельефа, а индекс m отвечает

изменениям вдоль поверхности (по горизонтали). Математика подробная тут неуместна, но физическая суть едина для крупномасштабных и мелкомасштабных случайных высот рельефа. Это отвечает третьему масштабу Колмогорова (4), описывающему в случае рельефа и уравнение (18) изменения потенциальной энергии, т.е. гравитационного поля в связи с рельефом.

Полное и последовательное изложение результатов, связанных с рельефом всех масштабов, готовится к печати.

Другие проявления законов 1934 г.

Время от времени в научной литературе появлялись работы, описывающие закономерности, похожие на турбулентные, но в условиях, когда их не следовало бы ожидать. Так, А. Б. Казанский [25] производил на Памире наблюдения за ледниками. В летние периоды сплошность некоторых больших ледников нарушается, и начинаются движения льда со скоростями до десятков метров в сутки. Поперек ледника расставлялись вешки, и с берега теодолитом следили за перемещениями вешек. Обработка таких данных показала, что квадрат относительных скоростей движений вешек степенным образом зависит от расстояния между ними, причем показатель степени n недалек от $2/3$.

Интересный численный эксперимент был проведен Тагучи [34]. В названии его статьи фигурирует спектр энергии $k^{-5/3}$ в отсутствии среднего потока. Рассматривалось несколько тысяч твердых шариков в прямоугольном ящике с периодическими граничными условиями по горизонтали. Дно ящика колебалось с задаваемыми амплитудой и частотой. После перехода через некоторый критический порог шарики начинали хаотические движения – происходила флюидизация среды. Энергетический спектр движений отдельных шариков был близок к турбулентному $k^{-5/3}$.

С таких же позиций был объяснен кумулятивный спектр распределения числа литосферных плит $N(\geq S)$ по площадям S : в работе [22] было найдено

$$N(\geq S) = 7S^{-n}, \quad n \approx 0.33,$$

а использование масштаба (2) дало, что $n = 1/3$.

Численный коэффициент, возникающий из сопоставления теории [6] с данными [3], оказался близким к единице. Величина $N(\geq S)$ имеет размерность обратного времени, а само формирование этих плит происходило в течении примерно ста миллионов лет, когда начал распадаться последний суперматерик Гондвана и стал появляться Атлантический океан.

Земля, как и остальные планеты, вращается, т.е. при этом задается временной масштаб. Многие структуры, возникающие при этом случайным образом, несут в себе черты масштабов Колмогорова 1934 г., конкретно, формул (2) – (4). Особенно четко это видно для конвективных образований во вращающихся средах [33], где квадрат масштаба скорости равен εl_c^{-1} , а масштаб площади $S = \varepsilon l_c^{-3}$, где l_c – параметр Кориолиса, $l_c = 2\omega \sin \theta$, $\omega = T / 2\pi$ – угловая скорость. Оба масштаба хорошо описывают тропические циклоны [7] и спиральные вихри на поверхности морей и океанов [10], по природе микроураганов в воде.

Для измеряемых характеристик галактик также были замечены связи с высокими корреляциями между измеряемыми величинами и получаемыми из теории размерности и/или из масштабов А. Н. Колмогорова (2) и (4). В этих условиях роль ε , скорости генерации/диссипации энергии, играет отношение светимости объектов к их массе. Сила гравитации, связующая звезды и газ в один объект, приводит к появлению двух параметров подобия, и как практически следует поступать в подобных ситуациях, представлено в [13].

Масштабы Колмогорова появились в 1934 г., когда знания законов окружающего нас мира были еще невелики и не находили конкретных применений. Первым их использовал четверть века спустя А. М. Обухов для получения результатов теории турбулентности в инерционном интервале, но тогда это воспринималось лишь как другой вывод известных законов 1941

года. Данные о волнении, о горизонтальной турбулентности в тропосфере стали появляться лишь десятилетия спустя, когда работа 1934 г. без конкретных применений была забыта.

Спектр энергии космических лучей

Наша атмосфера наэлектризована с содержанием ионов и электронов порядка 10^3 на см^3 . В нижних 2-3 километрах ионизация вызывается радиоактивными породами, а выше – космическими лучами, КЛ. Они образуются при взрывах сверхновых звезд, когда выделяется $10^{42} \div 10^{43}$ Джоулей. В нашей Галактике – Млечном пути происходят около 5 взрывов за два столетия [1]. Оболочки этих звезд срываются, образуя межзвездный газ, в котором образуются ударные волны. На них происходит дальнейшее ускорение частиц КЛ. Обзор этих эффектов можно найти в книге под редакцией В. Л. Гинзбурга [1], которая в основных положениях не устарела до сих пор. Электризация атмосферы влияет на микропроцессы в ней, например, на образование аэрозолей, тем самым на погоду и климат. Вместе с тем десятки лет вид спектра не поддавался теоретическому выводу.

Измеренный спектр – это число частиц в интервале энергий $E \pm \delta E$, регистрируемых на единице площади за единицу времени. Ясно, что чем больше энергия E , тем больше должны быть эти единицы, т.к. частицы КЛ требуют больше времени для своего ускорения и тем реже в пространстве они встречаются. Поэтому надо определить эти единицы. За единицу времени можно взять отношение энергии взрыва к скорости генерации G за указанный промежуток времени – столетие: отношение G/E будет оценивать частоту появления частиц с энергией E .

В книге [1] рассмотрение баланса энергии в нашей Галактике позволило оценить важную величину – плотность энергии КЛ на единицу объема: $w \approx 0.5 \text{ эВсм}^{-3}$; 1 электрон-Вольт $\approx 2 \cdot 10^{-16}$ Дж. Величину w можно связать с концентрацией числа частиц КЛ, которой можно дать оценку сверху

$$n(\geq E) = \int_E^{\infty} n(E) dE < \frac{1}{E} \int_E^{\infty} E_n(E) dE = w(> E) < \frac{w}{E}. \quad (21)$$

Второй интеграл в середине этой цепочки оценивает энергию числа частиц с концентрацией E . Величина слева $n(\geq E)$ есть их число на единицу объема, а $n^{2/3}(E)$ будет единицей площади, оцениваемой сверху как $(w/E)^{2/3}$. Вероятности для числа частиц в единицу времени, попадающих на единицу площади, и есть независимые события, и поэтому для регистрируемого спектра они должны быть перемножены, т.е. спектр как число событий за единицу времени, регистрируемых на единицу площади, должен быть

$$I(\geq E) \propto \frac{G}{E} \left(\frac{w}{E} \right)^{2/3} \sim E^{-5/3}. \quad (22)$$

Это так называемый интегральный, или кумулятивный, спектр, число регистрируемых частиц с энергией больше заданной. Дифференцируя (22) по E , получим дифференциальный спектр

$$I(E) \sim E^{-8/3}. \quad (23)$$

До недавнего времени [1] было известно, что показатель степени равен 1.7 в (22) и 2.7 в (23). В течение ряда лет (2006 – 2013) на нашем спутнике проходил российско-европейский эксперимент Памела по измерению энергетических спектров. В одной из последних публикаций [16] сообщалось, что этот показатель равен 2.67 ± 0.02 . Это редкий случай столь точного совпадения теории [5] с экспериментом. Интегральный спектр более гладкий, и там совпадение с теорией должно быть еще точнее.

Связь с теорией Колмогорова видна для единицы времени. Если формулу (4) справа и слева умножить на массу, например, частицы, то мы получим, что энергия такой частицы при воздействии на нее случайным образом растет пропорционально времени, факт, давно (с середины XX века) известный теоретикам. Таким образом, теория Колмогорова 1934 г. объясняет многие известные в науке о природе факты, в том числе и долго остававшиеся непонятными.

Масштабы Колмогорова опубликованы в 1934 году, когда не были известны объекты для их использования. Первое их применение показал в 1958 г. А. М. Обухов на Международном симпозиуме по загрязнению атмосферы в Оксфорде, где он показал, что они дают результаты для инерционного интервала турбулентности, причем в более широких предположениях, чем в 1941 году. Авиационные измерения турбулентности в последней четверти XX века выявили законы 1941 г. для масштабов порядка 1000 км. Данные по эволюции морского волнения, так называемые законы разгона, также могут быть поняты с этой точки зрения. Сюда же относятся и «загадочные» данные о статистических свойствах рельефа поверхности планет и целого ряда других явлений, перечисленных выше. Можно надеяться, что по мере расширения наших знаний об окружающем мире законы А. Н. Колмогорова будут проявляться снова и снова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. (ред.). Астрофизика космических лучей. М.: Наука, 1990.
2. Гледзер Е. Б., Голицын Г. С. Скейлинг и конечные ансамбли частиц в движении с притоком энергии. Докл. РАН, 2010, т. 433, №4, с. 466-470.
3. Голицын Г. С. Статистическое описание рельефа поверхности и его эволюции. – Физика Земли. 2003. №7, с. 3-8.
4. Голицын Г.С. Статистические закономерности макропроцессов: случайные блуждания в пространстве импульсов. – Докл. РАН. 2004, т. 398, №2, с. 177-180.
5. Голицын Г.С. Феноменологическое объяснение формы спектра космических лучей с энергиями $E > 10$ ГэВ – Письма в Астрон. ж. 2005. Т. 31. № 7. С. 500-505.
6. Голицын Г.С. О распределении числа литосферных плит по размерам. – Физика Земли. 2008, №6, с. 3-8.
7. Голицын Г.С. Ураганы, полярные и тропические, их энергия и размеры, количественный критерий возникновения. – Изв. РАН. Физ. атм. ок. 2008, т. 44, №5, с. 579-590.
8. Голицын Г.С. Энергетический цикл ветровых волн на поверхности океана. – Изв. РАН. Физ. атм. ок. 2010, т. 46, №1, с. 10-18.
9. Голицын Г.С. Коэффициент турбулентной диффузии примеси на водной поверхности в зависимости от стадии развития волнения. – Изв. РАН. Физ. атм. ок. 2011, т. 47, №3, с. 426-432.
10. Голицын Г.С. О природе спиральных вихрей на поверхности морей и океанов. – Изв. РАН. Физ. атм. ок. 2012, т. 48, №3, с. 391-395.
11. Голицын Г.С. Феноменологическое объяснение формы спектра космических лучей с энергиями $E > 10$ ГэВ – Письма в Астрон. ж. 2005. Т. 31. № 7. С. 500-505.
12. Голицын Г. С. Статистика и динамика природных процессов и явлений. – М.: Красанд, 2012.

13. Голицын Г. С. Теория подобия и размерности для галактик: объяснение давно известных результатов наблюдений – Докл. РАН, 2017, Т. 475, № 4, с. 395-399.
14. Давидан И. Н., Лопатухин Л. И., Рожков В. В. Ветровое волнение в Мировом океане. Л.: Гидрометеиздат, 1985.
15. Китайгородский С. А. Применение теории подобия к анализу волн, возбуждаемых ветром, как случайному процессу. – Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1962. №1, с. 73-82.
16. Карелин А. В., Адриани О., Барбарини Дж. и др. Новые измерения энергетических спектров протонов и ядер гелия космических лучей высоких энергий при помощи калориметра в эксперименте ПАМЕЛА. – Ж. эксп. теор. физ. 2014, т. 146. №3(9), с. 513-517.
17. Колмогоров А. Н. Случайные движения. Труды А. Н. Колмогорова. М.: Физматлит, 1993.
18. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т. 2, М.: Наука, 1967 (2-е изд. Спб.: Гидрометеиздат, 1996).
19. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока. – Докл. АН СССР. 1941. т. 32. № 1. С. 22-24.
20. Обухов А.М. Описание турбулентности в терминах лагранжевых переменных. – сб. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха. М.: ИИЛ, 1962. с. 138-140.
21. Яглом А. М. Корреляционная теория со случайными стационарными n-ми приращениями. – Матем. сб. 1955, т. 37, №1, с. 141-196.
22. Bird P. An updated digital model of plate boundaries. – Geochemistry, Geophysics, Geosystems. 2003. V.4. № 3. 1027, doi:10.1029/2001GC000252.
23. Gage K. S. Evidence of a $k^{-5/3}$ law inertial range in mesoscale two-dimensional turbulence. – J. Atmos. Sci. 1979. V. 36, p. 1950-1954.
24. Gagnaire-Renou E., Benoit M., Badulin S. I. On weakly turbulent scaling of wind sea in simulations of fetch-limited growth.– J. Fluid Mech. 2011. V.669, p. 178-213.

25. Kazansky A. B. (1987). Studying the motion of energy dissipation process in highly fractured glaciers using remote sensing technique. – Arch. Glaciology. 1987, v.19, p. 239-248.
26. Kolmogorov A. N. Zufällige Bewegungen. Ann. Math. 1934. V. 35. P. 116-117 (перевод: А. Н. Колмогоров. Труды по теории вероятностей. М.: Наука, 1983).
27. Komen G. J., Cavaleri L., Donelan M. et al. Dynamics and Modelling of Ocean Waves. – Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1994.
28. Lindborg, E. (1999). Can the atmospheric kinetic energy spectrum be explained by two-dimensional turbulence? – J. Fluid Mech. 1999, v. 388, p. 259-288.
29. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. N.Y., W.H. Freeman, 442 p.
30. Okubo A. Oceanic diffusion diagrams. – Deep-Sea Res. 1971, v.18, №5, p.789-802.
31. Phillips O.M. The Dynamics of the Upper Ocean. Cambridge. Cambridge Univ. Press, 1977.
32. Richardson, L. F. Atmospheric diffusion on a distance-neighbour graph. – Proc. Roy. Soc. London, 1926. V. 97A, No. 686, p. 354-373.
33. Richardson, L. F. A search for the law of atmospheric diffusion. – Beitrage Phys. für Atmosph. 1929. Bd.XV, s. 24-29.
34. Taguchi Y-h. Numerical study of granular turbulence and an appearance of the $k^{-5/3}$ energy spectrum in the absence of mean flow. – Physica D. 1995, v.80, No 1, p. 61-71.
35. Turcotte D. L. Fractals and Chaos in Geology and Geophysics. 2-nd ed. Cambridge Univ. Press, 1997.

Список рисунков к статье Г. С. Голицына

Рис. 1. Поведение средних квадратов относительных скоростей и относительных смещений частиц, согласно расчетам [2]

Рис. 2. «Закон $3/2$ Тоба» связи высоты спектрального пика волнения с его периодом (из Toba Y. J/ Phys. Oceanogr. 1978. V. 8. p. 494-507)

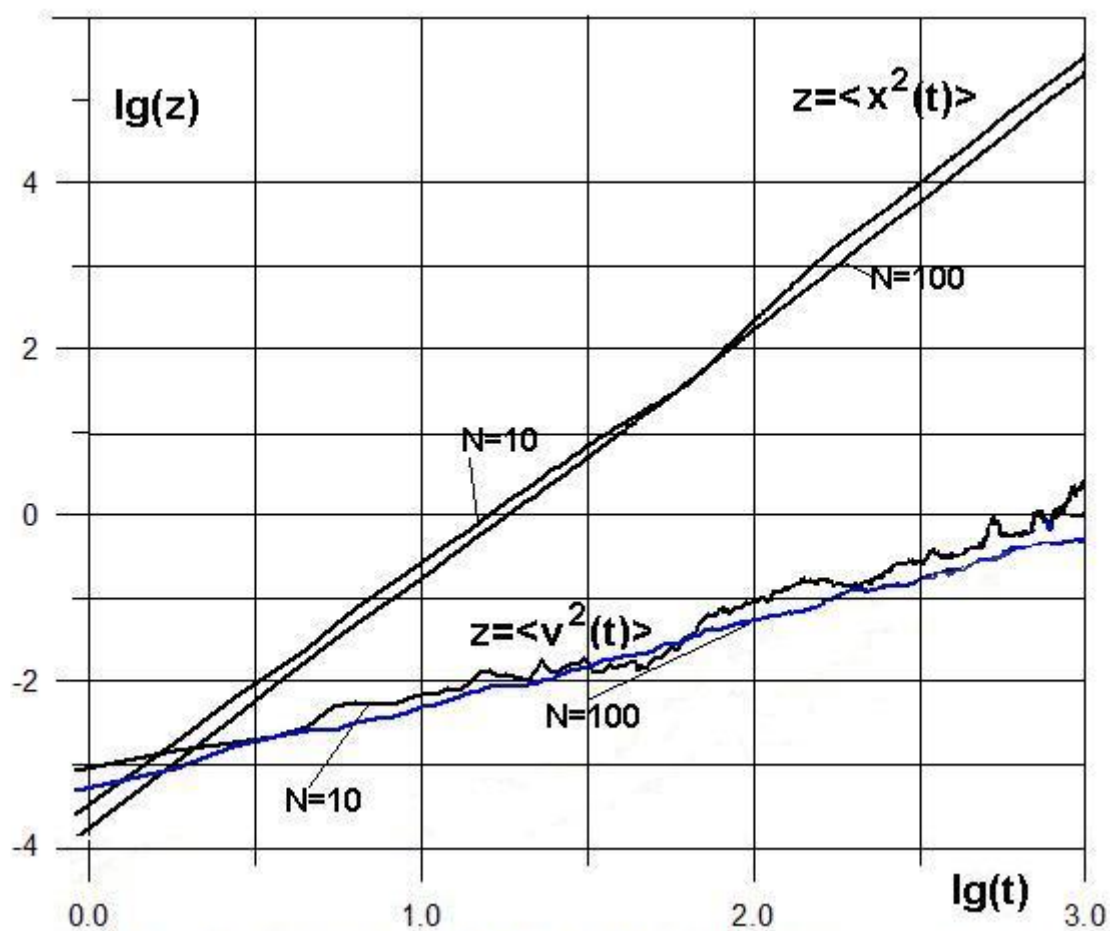


Рис. 1. Вторые моменты относительных скоростей и смещений частиц в зависимости от времени при $N = 10$ и 100 частиц при марковских ускорениях [13].

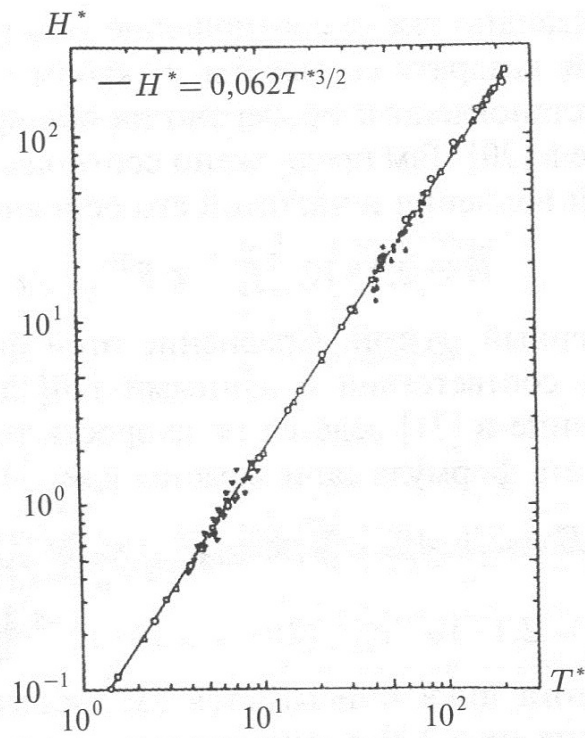


Рис. 2. «Закон 3/2 Тоба» связи высоты спектрального пика волнения с его периодом [35, 43].